Groupe diédral, groupe des quaternions, groupes d'ordre 8

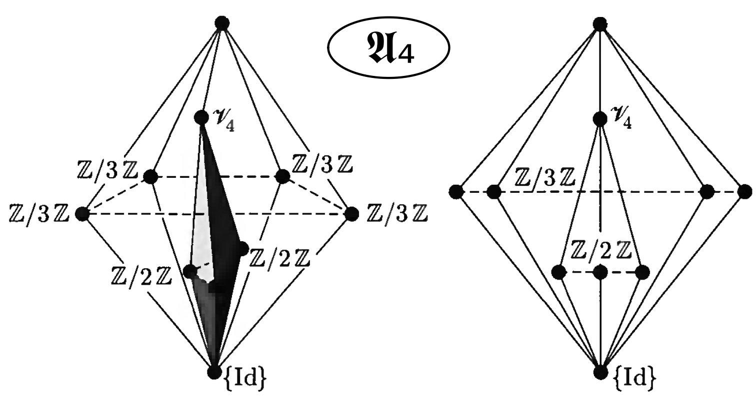
Exercice 1 (*Groupe d'automorphismes du groupe diédral*, [Delcourt, exercice 3.3.12])
Soit $n \geqslant 3$ un entier. Soit $G = \mathbb{D}_n$ le groupe diédral engendré par deux élements r, s satisfaisant les relations $r^n = s^2 = (rs)^2 = 1$.

1. Montrez que pour tout morphisme de groupes $f : G \to H$, les éléments $R = f(r)$ et $S = f(s)$ vérifient les relations $R^n = S^2 = (RS)^2 = 1$. Réciproquement, montrez que pour tout couple $(R, S) \in H^2$ tel que $R^n = S^2 = (RS)^2 = 1$ il existe un unique morphisme de groupes $f : G \to H$ tel que $f(r) = R$ et $f(s) = S$.
2. Déduisez de la question précédente que les automorphismes $f : G \to G$ sont les morphismes $f = f_{i,j}$ déterminés par $f(r) = r^i$ et $f(s) = sr^j$, pour $i \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ et $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Cette question nécessite de connaître le concept de produit semi-direct. Montrez que

$$N := \{f_{1,j};\, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad , \quad H := \{f_{i,0};\, i \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\} \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$$

   et que $\mathrm{Aut}(G)$ est le produit semi-direct $N \rtimes_\varphi H$ où φ est l'action naturelle de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

On se propose maintenant de construire et décrire le groupe des quaternions et le treillis de ses sous-groupes. Le *treillis des sous-groupes* d'un groupe donné est simplement l'ensemble de ses sous-groupes, muni de la relation donnée par l'inclusion. On le représente comme ci-contre pour l'exemple du treillis des sous-groupes de $\mathfrak{A}_4$ (ici dessiné de deux manières qui sont des variantes l'une de l'autre) : on dessine un sommet pour chaque sous-groupe, en mettant les sous-groupes de grand cardinal en haut et ceux de petit cardinal en bas, et on dessine un trait entre deux sommets lorsqu'il y a une inclusion entre les sous-groupes correspondants.



Exercice 2 (*Groupe des quaternions* $\mathbb{H}_8$, [Perrin], chapitre VII et [Ortiz], exo. I.13)
Dans $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ on considère les matrices :

$$i = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{matrix} & (0) \\ \hline (0) & \begin{matrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{matrix}\end{array}\right) \qquad \text{et} \qquad i = \left(\begin{array}{c|c} (0) & \begin{matrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{matrix} & (0)\end{array}\right).$$

On pose $k = ij$ et on note simplement 1 la matrice identité I_4.

1. Montrez que les relations suivantes sont satisfaites :

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$	$ij = -ji \;\;,\;\; ik = -ki \;\;,\;\; jk = -kj$	$ij = k \;\;,\;\; jk = i \;\;,\;\; ki = j$

2. Déduisez-en que le sous-groupe $\mathbb{H}_8$ engendré dans $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ par i et j est fini de cardinal 8.
3. Démontrez que le centre de $\mathbb{H}_8$ est $Z = \{\pm 1\}$.
4. Dénombrez les éléments de $\mathbb{H}_8$ par ordre croissant : éléments d'ordre 1, d'ordre 2...
5. Dénombrez les sous-groupes par ordre croissant. Dessinez le treillis des sous-groupes.
6. Montrez que tous les sous-groupes sont distingués.
7. Montrez que $\mathbb{H}_8/Z$ est isomorphe au groupe de Klein $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Exercice 3 (*Groupes d'ordre 8*, [Alessandri], chap. II, page 71)
Soit G un groupe d'ordre 8 et ω le maximum des ordres de ses éléments.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour ω ?
2. On suppose que $\omega = 8$. Identifiez la classe d'isomorphisme de G.
3. On suppose que $\omega = 2$. Montrez que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.
4. On suppose que $\omega = 4$ et que G est abélien. Montrez que $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

On suppose que $\omega = 4$ et G non abélien. On note alors H un sous-groupe d'ordre 4 de G.

3. On suppose que $G \smallsetminus H$ ne contient pas d'élément d'ordre 4. Montrez que G est isomorphe au groupe diédral $\mathbb{D}_4$.
(*On pourra montrer que pour générateur r de H et tout $s \in G \smallsetminus H$, on a $srs^{-1} = r^{-1}$.*)
4. On suppose que $G \smallsetminus H$ contient un élément d'ordre 4. Montrez que G est isomorphe au groupe des quaternions $\mathbb{H}_8$.
(*On pourra noter i un générateur de H et j un élément de $G \smallsetminus H$.*)

Références

[Alessandri] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie – groupes en situation géométrique*, Dunod.

[Delcourt] J. Delcourt, *Théorie des groupes*, Dunod.

[Ortiz] P. Ortiz, *Exercices d'algèbre*, Ellipses.

[Perrin] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses.