Le groupe des quaternions comme 2-Sylow de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$

Exercice 1 (*Le groupe des quaternions comme 2-Sylow de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, [Mneimné, § 0-A.2, page 82])
Soit $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ et H un 2-Sylow de G.

1. Vérifiez que le cardinal de G est égal à 24.
2. Montrez qu'il y a exactement 6 matrices de trace nulle dans G.
   (*Pour* $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$*, distinguez les cas* $a = 0$ *et* $a \neq 0$.)
3. Soit $M \in H$.
   (a) Montrez que M est annulée par le polynôme $X^8 - 1$.
   (b) Déduisez-en que M est diagonalisable sur une clôture algébrique du corps $\mathbb{F}_3$.
   (c) En utilisant le polynôme caractéristique, montrez que si $\mathrm{tr}(M) \neq 0$, alors $M = \pm \mathrm{I}_2$.
4. Montrez que $H = \{\pm \mathrm{I}_2\} \cup \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3);\ \mathrm{tr}(M) = 0\}$ puis que H est distingué.
5. Montrez que H est non abélien et possède 6 éléments d'ordre 4. Déduisez-en que H est isomorphe au groupe des quaternions $\mathbb{H}_8$.
6. Montrez que G est produit semi-direct du groupe des quaternions par $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et qu'il n'est pas isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$.

L'image suivante est extraite du livre [Mneimné].

Nous donnons dans cette section la liste (♠) des éléments de $SL(2, \mathbb{F}_3)$. Nous y ferons allusion par la suite.

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad -i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$j = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad -j = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad -k = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$a^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Remarquons que les éléments de $\mathbb{H}_8$ figurent sur les deux premières lignes

Exercice 2 (*Points fixes d'un p-groupe sur un ensemble fini, archi-classique*)
Soient G un p-groupe fini (ce qui implique $G \neq \{1\}$). Démontrer que si G agit sur un ensemble fini X, avec sous-ensemble de points fixes X^G, on a $|X^G| \equiv |X| \mod p$.

Exercice 3 (*Lemme de Cauchy*, [FGN1, exercice 2.10])
Soit p un nombre premier. On démontre ici le lemme de Cauchy : *tout groupe fini dont l'ordre est multiple de p possède un élément d'ordre p*, par une méthode due à John McKay en 1959.

1. Soit H un groupe fini d'ordre multiple de p. On note $X = \{(x_1, \dots, x_p) \in H^p;\ x_1 \dots x_p = 1\}$. Démontrez que l'application $\sigma : X \to X$ définie par $\sigma(x_1, \dots, x_p) = (x_2, \dots, x_p, x_1)$ définit une action de $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur X. Utilisant l'exercice précédent, déduisez-en que H possède un élément d'ordre p.
2. Lorsque H est abélien, donnez une autre démonstration utilisant un argument plus direct.

Exercice 4 (*Théorème de Sylow*, [Serre, chap. II, § 8.4])
Soit p un nombre premier. Soit G un groupe fini d'ordre $n = p^d m$ avec $p \nmid m$. On appelle *p-sous-groupe de Sylow de G*, ou simplement *p-Sylow de G*, un sous-groupe d'ordre p^d.

1. Démontrez par récurrence sur n que tout groupe fini possède un p-Sylow :
   (a) Soit C le centre de G. Si p divise $|C|$, par le lemme de Cauchy (exer. 3) il existe un sous-groupe $D \subset C$ d'ordre p. Utilisez l'hypothèse de récurrence avec G/D pour conclure.
   (b) Si p ne divise pas $|C|$, montrez que G agit sur $G \smallsetminus C$ par conjugaison et qu'il existe un point x dont l'orbite est de cardinal premier avec p. Utilisant l'hypothèse de récurrence pour le stabilisateur $H = G_x$, montrez qu'un p-Sylow de H répond à la question.
2. Démontrez que tout p-sous-groupe $Q \subset G$ est inclus dans un p-Sylow.
   Indication. Soit P un p-Sylow. On fait agir Q sur $X = G/P$ par translations à gauche. Utilisant l'exercice 1, montrez que Q est inclus dans un conjugué de P.
3. Démontrez que tous les p-Sylow de G sont conjugués.
   Indication. Prolongez la preuve de la question précédente dans le cas où Q est un p-Sylow.

Références

[FGN1] Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas, Exercices de mathématiques Oraux X-ENS, Algèbre 1, Cassini.

[Mneimné] Rached Mneimné, *Éléments de géométrie – actions de groupes*, Cassini.

[Serre] Jean-Pierre Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann.